TD 1

correction des SF

SF de base

▷ $u(t) = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \pi/4)}$

$= \underline{U_0} e^{j\omega t}$ avec $\underline{U_0} = U_0 e^{j\pi/4}$

▷ $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \underline{i} = I\sqrt{2}\, e^{j(\omega t - \varphi)}$

$= \underline{I_0}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{I_0} = I\sqrt{2}\, e^{-j\varphi}$

▷ $s(t) = S_m \sin(\omega t)$

$= S_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{s} = S_m e^{j(\omega t - \pi/2)}$

$= \underline{S_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{S_m} = S_m e^{-j\pi/2}$

▷ $\underline{U_m} = U_m e^{-j\pi/3} \longrightarrow u(t) = U_m \cos(\omega t - \pi/3)$

▷ $\underline{I_1} = -\frac{jU_0}{R} \rightarrow i(t) = Re\left(-j\frac{U_0}{R} e^{j\omega t}\right)$

$= Re\left(-j\frac{U_0}{R}\cos\omega t - j\frac{U_0}{R} j\sin\omega t\right)$

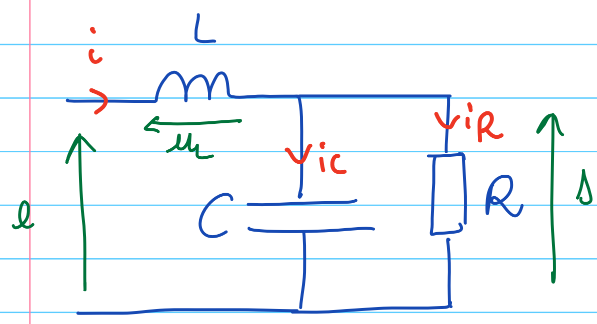
$= Re\left(-j\frac{U_0}{R}\cos\omega t + \frac{U_0}{R}\sin\omega t\right)$

$= \frac{U_0}{R}\sin(\omega t)$

▷ $\underline{I} = -I_m e^{j\pi/6} = I_m e^{j(\pi/6 + \pi)}$

$\rightarrow i(t) = I_m \cos\left(\omega t + \frac{7\pi}{6}\right)$

SF 1



▷ ED directement :

On applique la loi des mailles : $e(t) = u_L(t) + s(t)$

$$= L\frac{di}{dt} + s(t)$$

D'après la loi des noeuds $i(t) = i_C(t) + i_R(t)$

Donc $$e(t) = L\frac{di_C}{dt} + L\frac{di_R}{dt} + s(t)$$

or $s(t) = R\,i_R$ et $i_C = C\frac{ds}{dt}$

Donc $$\boxed{e(t) = LC\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{ds}{dt} + s(t)}$$

Sous forme canonique : $$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{LC}s(t) = \frac{1}{LC}e(t)$$

On identifie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$

d'où $Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

▷ **Fonction de transfert directement**

On a une impédance équivalente à R et C :

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = j\omega C + \frac{1}{R} = \frac{1 + j\omega RC}{R}$$

Donc $\underline{Z_{eq}} = \dfrac{R}{1 + j\omega RC}$

Par le pont diviseur de tension, on a directement

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{j\omega L + \underline{Z_{eq}}} \underline{e}$$

ie $$\underline{H} = \frac{R/(1+j\omega RC)}{j\omega L + R/(1+j\omega RC)} = \frac{R}{j\omega L(1+j\omega RC) + R}$$

$$= \frac{R}{R + j\omega L - \omega^2 RLC} = \boxed{\frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R} - \omega^2 LC}}$$

On identifie $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\dfrac{1}{\omega_0 Q} = \dfrac{L}{R}$

d'où $Q = \dfrac{R}{L}\sqrt{LC} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

▷ **Passage de l'ED à la fonction de transfert**

ED : $$e(t) = LC \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{ds}{dt} + s(t)$$

On passe en complexes : $\underline{e} = LC(j\omega)^2 \underline{s} + \frac{L}{R} j\omega \underline{s} + \underline{s}$

Donc $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \frac{L}{R} j\omega - LC\omega^2}$ ✓

▷ Passage de la fonction de transfert à l'ED

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R} j\omega - LC\omega^2} \Rightarrow \underline{e} = LC (j\omega)^2 \underline{s} + \frac{L}{R} j\omega \underline{s} + \underline{s}$$

Donc $e(t) = LC \dfrac{d^2 s}{dt^2} + \dfrac{L}{R} \dfrac{ds}{dt} + s(t)$ ✓

SF2

On a $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0 Q} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

En basse fréquence, on a la fonction de transfert équivalente

$\underline{H}_{BF} = 1$

Donc $G_{BF} = 1$ et $G_{dBBF} = 0$

et $\varphi_{BF} = 0$

En haute fréquence, on a la fonction de transfert équivalente

$\underline{H}_{HF} = \dfrac{1}{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$

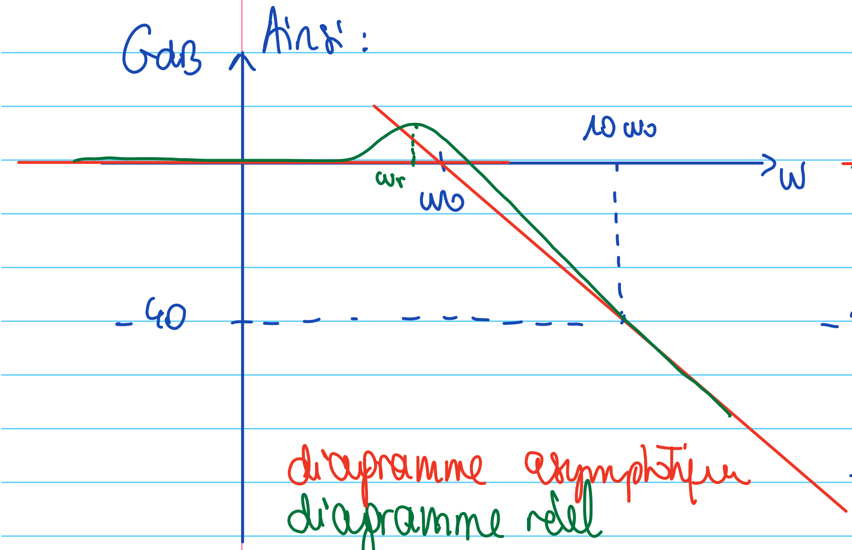
Donc $G_{HF} = \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$ et $G_{dBHF} = 20\log\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$

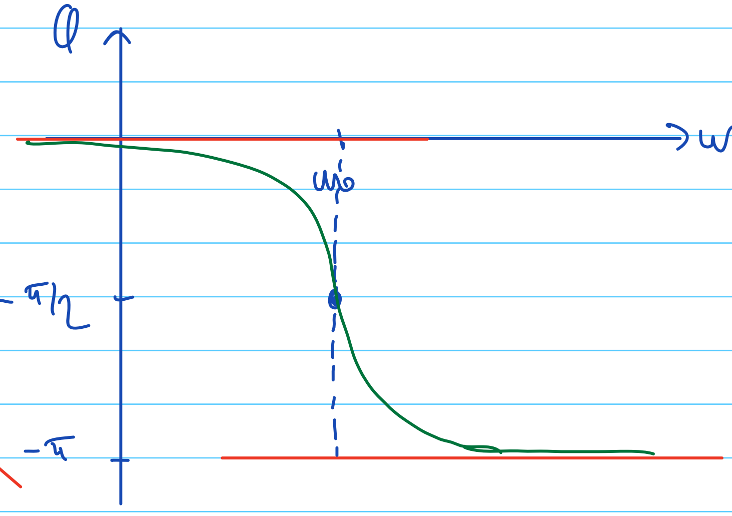
$= 20\log\omega_0^2 - 40\log\omega$

pente -40 dB/déc

et $\varphi_{HF} = -\pi$

Ainsi :





Pour tracer le diagramme réel, il faut calculer Q

Ici $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 1000 \times \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-9}}{0,1}}$

$= 10^3 \times \sqrt{10^{-7} \times 10}$

$= \underline{1}$. Il y a donc résonance, mais pas très marquée.

SF3

1) $e(t) = E_0 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_3 t)\right)$

Alors

$$s(t) = E_0 \Big(G(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) + G(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \varphi(\omega_2)) + G(\omega_3)\cos(\omega_3 t + \varphi(\omega_3))\Big)$$

On lit graphiquement $G(\omega_1) = 10^{0/20} = 1$

$G(\omega_3) = 10^{-40/20} = 10^{-2}$

Par ailleurs, on sait que $G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ou $G_{dB}(\omega_0) = -3\,dB$)

Pour les phases, on lit graphiquement

$\varphi(\omega_1) = 0$; $\varphi(\omega_3) = -\frac{\pi}{2}$ et $\varphi(\omega_2) = -\frac{\pi}{4}$.

Ainsi, $\boxed{s(t) = E_0\left(\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + 10^{-2}\cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)\right)}$

2) La pulsation $\frac{\omega_0}{1000}$ est très petite devant ω_0 : le signal d'entrée a donc une très grande partie (voire toutes) ses composantes dans la bande passante : le signal de sortie est donc le même que le signal d'entrée.

3) Pour un signal de pulsation $1000\,\omega_0$, le filtre aura un effet moyenneur : en sortie, on aura un signal constant valant la valeur moyenne du signal d'entrée.

SF4

1) **Filtre 1** : passe bas, a priori d'ordre 2 (pente -40 dB/déc)

On peut proposer $\underline{H}_1 = \dfrac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ avec $H_0 = 10^{40/20} = 100$

$\omega_0 = 2\pi \times 10^{-1}$ rad.s^{-1}

Pour proposer une valeur de Q, il faudrait le tracé réel.

Filtre 2 : passe-bande, a priori ordre 2

On peut proposer $\underline{H}_2 = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ avec $\omega_0 = 10^3$ rad.s^{-1}

Pour proposer une valeur de H_0 et Q, il faudrait le diagramme réel

Filtre 3 : passe-haut, a priori d'ordre 1 (pente $+20$ dB/déc)

On peut proposer $\underline{H}_3 = \dfrac{H_0 j\omega/\omega_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

avec $\omega_0 = 100$ rad.s^{-1} et $H_0 = 10^{-20/20} = 0{,}1$.

2) Seul le filtre 2 peut être un intégrateur simple pour des signaux de pulsation supérieure à 1000 rad.s^{-1}, car on a alors une pente -20 dB/déc.

Pour obtenir un dérivateur, il faut une pente $+20$ dB/déc sur le diag. de Bode
C'est le cas pour le filtre 2 pour des pulsations inférieures à 1000 rad.s^{-1}
ou pour le filtre 3 pour des fréquences inférieures à 100 rad.s^{-1}.

Sf 5

Système 1 : les composantes basse fréquence (fondamental et 2° harmonique) sont conservées
l'harmonique de rang 3 est très atténuée
les harmoniques de rang 4 et 5 sont filtrés

Il s'agit donc d'un passe-bas de fréquence propre proche de 2f.

Système 2 : l'harmonique de rang 3 est conservé
ses voisines de rang 2 et 4 sont conservées mais atténuées

Il s'agit donc d'un passe-bande de fréquence propre proche de 3f

Système 3 : on voit l'apparition d'harmoniques non présentes sur le spectre du signal d'entrée

Ce système n'est donc pas linéaire.

SF6

1) Non, ce n'est pas possible car la DSF du signal n'a aucune composante à 10 kHz (pas multiple impaire de 3 kHz)

2) Oui, il faut un passe bande très sélectif ($Q \gg 1$) de fréquence propre 9 kHz. On sélectionne ainsi l'harmonique de rang 3 de la DSF du signal d'entrée.

3) Oui, il faut un filtre intégrateur. On peut proposer un passe bas d'ordre 1 de fréquence de coupure de l'ordre de qq centaines de Hz.

4) Oui, il suffit de prendre un filtre coupant toutes les composantes ie soit un passe bas de fréquence propre $\ll$ 3 kHz
haut $\gg$ 3 kHz.